

### M 8.3 Funktionale Zusammenhänge: elementare gebrochen-rationale Funktionen

In Jahrgangsstufe 8 lernen die Schüler neben den linearen Funktionen auch einfache gebrochen-rationale Funktionen kennen. Dies wirkt einer zu einseitigen Besetzung des Funktionsbegriffs mit linearen Funktionen entgegen und eröffnet zudem die Möglichkeit, Bruchterme graphisch zu veranschaulichen und im Zuge dessen Bruchgleichungen auch graphisch zu lösen. Dabei wird flexibles Herangehen an neue Problemstellungen gefördert und gleichzeitig dem Gedanken der Vernetzung Rechnung getragen. Im Lehrplan ist ausdrücklich nur von **einfachen Beispielen gebrochen-rationaler Funktionen** die Rede; auch der vorgesehene Stundenumfang und die Kapitelüberschrift „**elementare gebrochen-rationale Funktionen**“ signalisieren dies. So sollten die betrachteten Funktionen in der Regel nur eine Definitionslücke aufweisen und ihre Graphen auf waagrechte und senkrechte Asymptoten beschränkt bleiben; gebrochen-rationale Funktionen mit schrägen Asymptoten sind nicht vorgesehen. An eine systematische Behandlung dieses Funktionstyps, z. B. die Abhängigkeit des Graphenverlaufs von Zähler- und Nennergrad, ist nicht gedacht. Auch sollte das Grenzwertverhalten nur anschaulich im Sinne der Annäherung eines Graphen an seine Asymptoten bzw. im Sinne der zugehörigen Entwicklung der Termwerte angesprochen werden. Funktionsplotter unterstützen dabei die Visualisierung von Funktionen.

Im Rahmen dieses Lehrplankapitels erwerben die Schüler auch algebraische Fertigkeiten für den Umgang mit **einfachen Bruchtermen und Bruchgleichungen** in einem der Jahrgangsstufe adäquaten Maß. Dabei steht nicht die Komplexität einzelner Terme, sondern variantenreiches Üben, das die Vernetzung mit gebrochen-rationalen Funktionen einbezieht, im Vordergrund. Die binomischen Formeln werden erst in Jahrgangsstufe 9 behandelt und stehen somit an dieser Stelle noch nicht zur Verfügung.

Erste Erfahrungen mit Bruchtermen haben die Schülerinnen und Schüler bereits in Jahrgangsstufe 7 im Rahmen des Kapitels „M 7.2.1 Term und Zahl“ gesammelt, als sie beim Berechnen von Termwerten das Rechnen mit rationalen Zahlen wiederholten und vertieften. In Jahrgangsstufe 8 wurden in „M 8.1.1 Proportionalität“ und „M 8.1.2 Funktion und Term“ Bruchterme erneut aufgegriffen. Im Sinne des kumulativen Lehrplanaufbaus werden Bruchgleichungen und Bruchterme insbesondere auch in den Lehrplankapiteln „M 8.4 Strahlensatz und Ähnlichkeit“, „M 9.2.2 Quadratische Funktionen in Anwendungen“ und „M 10.5.2 Vertiefen der Funktionenlehre“ sowie in der Oberstufe thematisiert.

Im Kontext von Bruchtermen erweitern die Schüler Potenzen auch auf negative Exponenten und üben an Termen angemessener Komplexität die in dieser Jahrgangsstufe explizit formulierten Potenzgesetze ein. In Jahrgangsstufe 9 werden dann in Kapitel „M 9.3 Erweiterung des Potenzbegriffs“ Potenzen mit gebrochenen Exponenten eingeführt.

## Beispielaufgaben

Die folgenden Beispiele zeigen variationsreichere Aufgabenstellungen mit **Termen angemessener Komplexität**. Die Aufgaben weisen hinsichtlich der angestrebten Rechenfertigkeit ein Niveau auf, das erreicht und gehalten werden soll. Unter dem Aspekt der Differenzierung werden jedoch weitere Aufgaben, die von diesem Niveau abweichen, von den Schülern bearbeitet werden

1. Gegeben ist der Term  $T(a) = \frac{3}{1-a}$ .

- Berechne  $T(4)$ ,  $T(-5)$  und  $T(1/2)$ .
- Welchen Wert der Variablen  $a$  darfst du nicht in diesen Term einsetzen?
- Erläutere, wo diejenigen Zahlen auf dem Zahlenstrahl liegen, die beim Einsetzen möglichst große Termwerte ergeben.

*[Kommentar: Diese Aufgabe könnte bereits in Jahrgangsstufe 7 im Zusammenhang mit der Berechnung von Termwerten und dem Argumentieren mit Termen bearbeitet worden sein und jetzt wieder aufgegriffen werden. Teilaufgabe 1c spricht die Kompetenz „mathematisch argumentieren“ an. Die Berechnung von Termwerten wie  $T(1/2)$  dient als Hinführung.]*

2. Gegeben ist die Funktion  $f$  mit Abbildungsvorschrift  $f : x \mapsto \frac{2x}{2x+3}$ .

- Welche Zahl kann nicht in der Definitionsmenge enthalten sein?
- Berechne  $f(10)$ ,  $f(100)$ ,  $f(1000)$ .
- Lege eine Wertetabelle an und zeichne den Funktionsgraphen.
- Gib die Gleichungen der Asymptoten von  $G_f$  an.

*[Kommentar: An eine vollständige Systematik bei der Behandlung von gebrochenrationalen Funktionen ist nicht gedacht. Das asymptotische Verhalten der Funktion liegt auf Grund der Wertetabelle nahe und erschließt sich durch Argumentieren anhand des Terms: Wenn für die Variable betragsmäßig sehr große Werte eingesetzt werden, dann verliert der Summand „3“ im Nenner an Bedeutung; die Werte von Zähler und Nenner unterscheiden sich relativ gesehen immer weniger. Eine entsprechende, anschauliche Argumentation bietet sich auch für das Verhalten der Funktion in der Umgebung der Definitionslücke an.]*

3. Welche der abgebildeten Graphen gehören zu den angegebenen Funktionsgleichungen? Ordne zu.

a)  $y = \frac{2x}{x+1}$

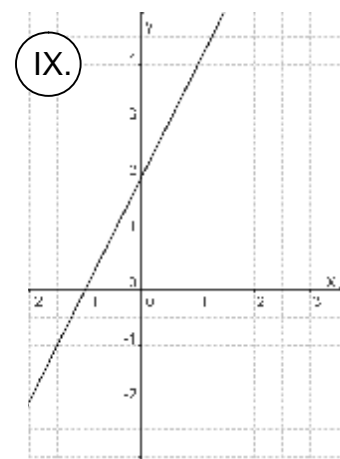
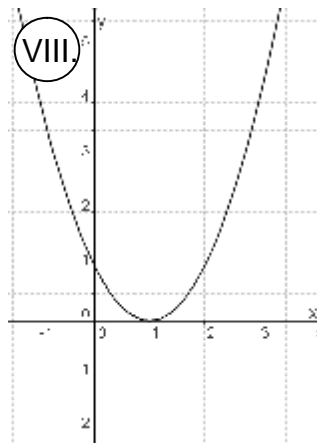
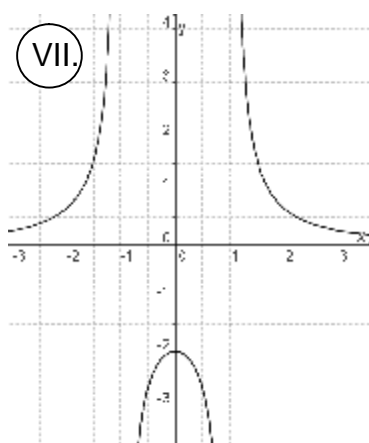
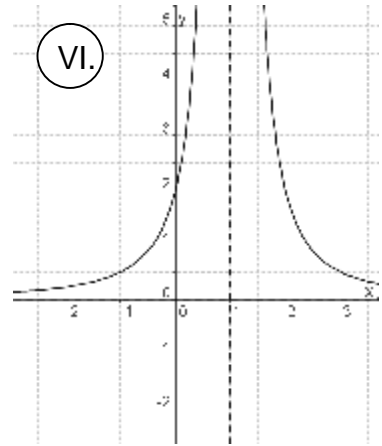
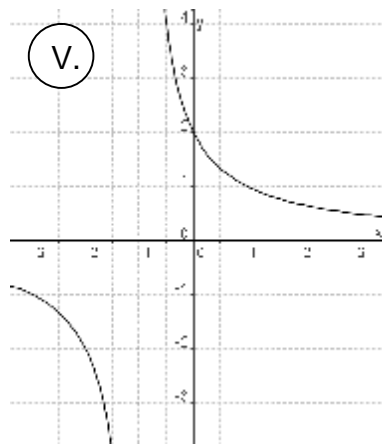
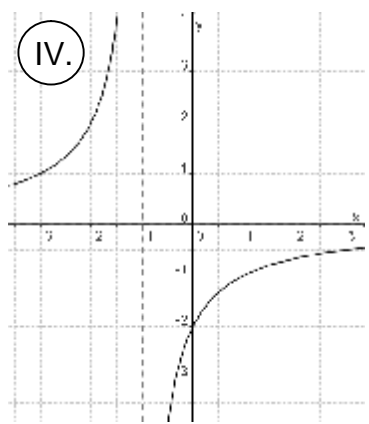
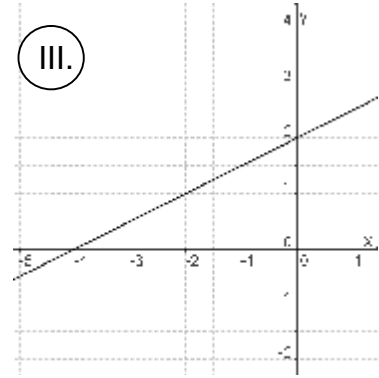
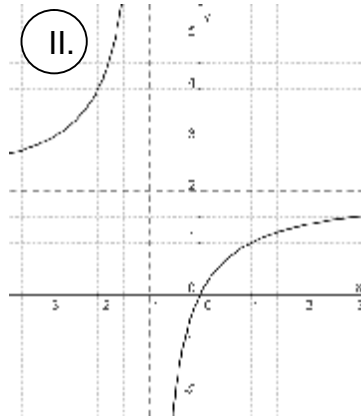
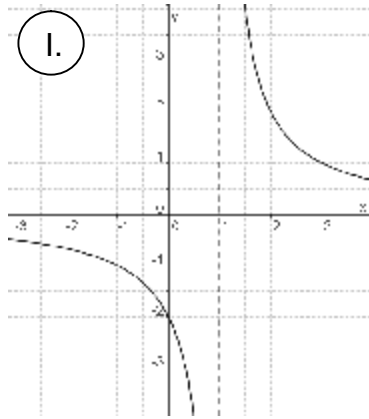
b)  $y = \frac{2}{(x-1)^2}$

c)  $y = \frac{2}{x-1}$

d)  $y = 2x + 2$

e)  $y = (x-1)^2$

f)  $y = \frac{-2}{x+1}$



4. Aufgabe BMT 2001: Gegeben ist der Bruchterm  $T(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$

- Gib die Definitionsmenge des Terms an.
- Fasse die beiden Brüche zusammen und vereinfache.
- Berechne  $T(-3)$ .

*[Kommentar: Die niedrigen Lösungshäufigkeiten dieser Aufgabe – Teilaufgabe a) 56 %, b) 14 % und c) 25 % – legen nahe, in Übungsphasen variantenreiches Üben, das auch vernetzendes Denken fordert, in den Vordergrund zu stellen.]*

5. Vereinfache beide Terme, falls dies möglich ist.

a)  $\frac{9x}{3x - 6x^2}$                       b)  $\frac{4}{4 + x^2}$

Begründe, dass die Termwerte von Teilaufgabe b) nicht größer als 1 werden können, unabhängig davon welche Zahl man für  $x$  einsetzt.

*[Kommentar: Zur Beantwortung der Zusatzfrage muss der Schüler anhand eines Terms argumentieren. Diese Aufgabe lässt sich beispielsweise durch die Frage nach dem asymptotischen Verhalten des zugehörigen Funktionsgraphen weiterentwickeln. Zudem kann ein Vergleich mit Termen wie  $\frac{4}{4+x}$ ,  $\frac{4}{4-x}$  oder  $\frac{4}{4-x^2}$  das Verständnis vertiefen.]*

6. Fasse jeweils zu einem Bruch zusammen. In welchen Fällen ändert sich durch die Umformung die maximale Definitionsmenge?

a)  $\frac{2}{x} - \frac{x}{2} + x$

b)  $1 - \frac{2-y}{y}$

c)  $\frac{x}{x-x^2} - \frac{3}{1-x}$

d)  $\frac{t}{t-4} + \frac{2}{t} + 1$

e)  $\frac{a-3}{a^2-3a} \cdot \frac{2a}{a+3}$

f)  $1 - \frac{x-3}{x+2} : \frac{3-x}{x+2}$

**Zusatzfrage:** Setze zur Überprüfung der Umformungen jeweils in den Ausgangsterm sowie den zugehörigen vereinfachten Term die Zahl 2 ein und berechne die Termwerte. Kannst du dir, wenn beide Termwerte übereinstimmen, sicher sein, dass die Termumformung richtig ist?

*[Kommentar: Es ist nicht intendiert, Aufgaben zu konstruieren, die gleichzeitig alle Problemfelder beim Umgang mit Bruchtermen beinhalten, wie z. B. mehrfaches Kürzen oder Ausklammern von -1. Vielmehr soll variantenreiches Üben im Vordergrund stehen.]*

7. Klaus und Monika bearbeiten die gleiche Aufgabe.

Klaus rechnet:

$$\frac{2}{a-2} - \frac{5a}{10-5a} = \frac{2(10-5a)}{(a-2)(10-5a)} - \frac{5a(a-2)}{(a-2)(10-5a)} =$$

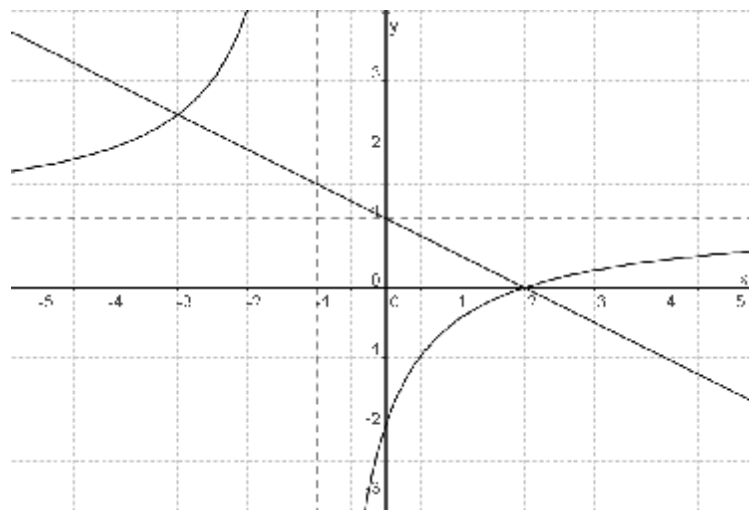
$$\frac{20-10a-5a^2+10a}{(a-2)(10-5a)} = \frac{-5a^2+20}{(a-2)(10-5a)}$$

Monika geht wie folgt vor:

$$\frac{2}{a-2} - \frac{5a}{10-5a} = \frac{2}{a-2} - \frac{5a}{-5(a-2)} = \frac{2}{a-2} + \frac{a}{a-2} = \frac{2+a}{a-2}$$

Haben Klaus und Monika korrekt gerechnet? Nimm Stellung zu den verschiedenen Vorgehensweisen.

8.



a) Die Zeichnung zeigt die Graphen der Funktionen mit den Funktionsgleichungen

$$y = \frac{x-2}{1+x} \text{ und } y = -\frac{1}{2}x + 1. \text{ Bestimme anhand der Zeichnung die Lösungsmenge}$$

$$\text{der Gleichung } \frac{x-2}{1+x} = -\frac{1}{2}x + 1.$$

b) Bestimme mit Hilfe des gegebenen Funktionsgraphen die Lösungsmenge der

$$\text{Gleichung } \frac{x-2}{1+x} = -1.$$

*[Kommentar: Diese Aufgabe verdeutlicht, dass sich algebraische Terme in einer Variablen prinzipiell als Funktionsgraphen interpretieren lassen, die zur graphischen Lösung von Gleichungen herangezogen werden können. Die notwendige rechnerische Überprüfung der Ergebnisse ist in beiden Teilaufgaben „im Kopf“ möglich.]*

9. Bestimme jeweils die Lösungsmenge:

a)  $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x}$

b)  $\frac{2}{x-2} - 2 = \frac{1}{4-2x}$

[Kommentar: Bei obigen Aufgaben könnte man beispielsweise erst zusammenfassen und dann mit dem Hauptnenner multiplizieren oder sofort mit dem Hauptnenner multiplizieren.]

10. Beim Lösen einer Gleichung der Form  $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$  muss man nur „über Kreuz multiplizieren“, d. h.,

$\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$  ist äquivalent zu  $p \cdot n = q \cdot m$ .

a) Begründe, dass diese Aussage richtig ist.

b) Wende das Vorgehen bei folgenden Bruchgleichungen an:

$\frac{3}{2x+1} = \frac{2}{2-x}$  und  $\frac{x-2}{3+x} = \frac{2x}{2x-3}$

c) Löse folgende Bruchgleichung:  $1 + \frac{2}{2x-1} = \frac{x}{x+2}$

[Kommentar: Nicht jedes Lösungsverfahren muss im Unterricht behandelt werden. Im Aufgabenbeispiel erfahren und begründen die Schüler ein spezielles Lösungsverfahren. In Teilaufgabe c) wird die Anwendung dieses Lösungsverfahrens problematisiert.]

11. Zeichne gegebenenfalls mit einem Funktionsplotter die Graphen der Funktionen  $f_1: x \mapsto \frac{3}{x+2}$  und  $f_2: x \mapsto \frac{1}{2-x}$ . Lies die Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen aus der Zeichnung ab und überprüfe dein Ergebnis rechnerisch.

[Kommentar: Es bieten sich bei der rechnerischen Überprüfung zwei Möglichkeiten an: Gleichung lösen oder die aus der Zeichnung gewonnene x-Koordinate einsetzen und überprüfen, ob beide Termwerte übereinstimmen.]

12. Gegeben sind die Funktionen f und g mit  $f(x) = \frac{-3}{x+2} + 1$  sowie  $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ .

Bestimme den Schnittpunkt der zugehörigen Graphen.

[Kommentar: Auch bei dieser Aufgabe können graphischer und rechnerischer Lösungsweg kombiniert werden.]

13. Gegeben ist die Funktion h:  $x \mapsto \frac{1+x}{x-2}$ .

a) Bestimme die Nullstelle der Funktion h.

b) An welcher Stelle nimmt die Funktion h den Wert 4 bzw. -4 an?

[Kommentar: Es sind sowohl zeichnerische als auch rechnerische Lösungen in Betracht zu ziehen.]

14. Berechne jeweils:

a)  $5^3$     b)  $-5^3$     c)  $(-5)^3$     d)  $5^{-3}$     e)  $-5^{-3}$     f)  $(-5)^{-3}$

15. Fasse so weit wie möglich zusammen:

a)  $a^3 : a^{-6}$     b)  $2x^{-2} \cdot 3x^3$     c)  $10^{-12} : 10^{-3}$     d)  $6 : 2^3 - 9 \cdot 3^{-2}$   
e)  $x^{-n} \cdot x$     f)  $0,5x^2 + 1,5x^3$     g)  $\left(\frac{x^3y^{-4}}{y^{-5}x^2}\right)^{-2}$

16. Finde alle zueinander äquivalenten Terme:

$x^{10}$ ;  $x^{-6}$ ;  $(x^{-2})^4$ ;  $x^5 + x^5$ ;  $(-x)^6$ ;  $x^{-8}$ ;  $x^{15} : x^5$ ;  $x^{-22} x^{16}$ ;  $-x^6$

17. Vereinfache die folgenden Terme:

a)  $10 \cdot 10^{-2} : 10^4 + 10^0$     b)  $x^{-1} \cdot x^2 \cdot x^0 \cdot x^{-3} \cdot x^4$     c)  $10^{-1} + 10^{-2}$   
d)  $x^{-1} + x^{-2}$     e)  $x^{-2} - \frac{x^2}{x^4}$     f)  $\left(\frac{1}{x} + x^{-2}\right) \cdot 2x$